Diánoia
ISSN: 0185-2450
dianoia@filosoficas.unam.mx
Universidad Nacional Autónoma de México
México

BARCELÓ ASPEITIA, AXEL A.
¿Qué tan matemática es la lógica matemática?
Diánoia, vol. XLVIII, núm. 51, noviembre, 2003, pp. 3-28
Universidad Nacional Autónoma de México
Distrito Federal, México

¿Qué tan matemática es la lógica matemática?*

AXEL A. BARCELÓ ASPEITIA
Instituto de Investigaciones Filosóficas
Universidad Nacional Autónoma de México
abarcelo@minerva.filosoficas.unam.mx

Resumen: La lógica matemática es matemática en cuanto que usa herramientas matemáticas. En este sentido, la lógica matemática es matemática en el mismo sentido que lo es, digamos, la mecánica newtoniana. En ambos casos, el método es matemático, pero las ciencias mismas *no* lo son, pues su objeto de estudio pertenece a una realidad objetiva e independiente. En particular, las herramientas matemáticas que usa la lógica simbólica contemporánea —tanto en su simbolismo como en su cálculo— se crearon originalmente para el desarrollo algebraico de la geometría, y luego fueron adaptadas al resto de las matemáticas y la lógica. A estas herramientas se les llama *formales*, pues permiten el cálculo con formas generales.

Palabras clave: formal, lógica formal, lógica simbólica, análisis

Tal y como su título lo indica, el objetivo de este artículo es responder la pregunta: ¿Qué tan matemática es la lógica matemática?[1] En sí misma, la respuesta es sencilla: la lógica matemática es matemática en cuanto que

* El origen de este trabajo es una plática titulada “¿Por qué la lógica es filosofía y no matemáticas?”, que presenté el 17 de noviembre de 2002 dentro del Primer Coloquio de Filosofía “La Importancia de la Lógica en el Estudio de la Filosofía”, organizado por la Coordinación de Filosofía del Sistema de Universidad Abierta de la Facultad de Filosofía y Letras de la UNAM. Agradezco a la mencionada coordinación su invitación, así como a mis compañeros de mesa durante esa presentación, Pedro Ramos y Arturo Yañez, por sus comentarios. Aún mayor agradecimiento les debo a los árbitros anónimos de *Diánoia* por sus acertados y útiles comentarios. La presente versión también fue enriquecida por las valiosas discusiones que sostuve con Raymundo Morado y los miembros del seminario informal de Filosofía de las Matemáticas: Sílvio Pinto, Max Fernández de Castro y Javier Elizondo.

[1] Para responder esta pregunta es necesario suponer cierta caracterización de la lógica y las matemáticas. A este respecto, mi posición es naturalista, ceñida a las prácticas actuales en lógica y matemática. Por ejemplo, cuando doy por sentado que ciertas relaciones y propiedades como la consecuencia lógica, la validez, la consistencia, etc., son *lógicas*, ignoro la pregunta de qué hace que estas propiedades y relaciones sean lógicas. No pretendo sino reportar el objeto de estudio de la lógica actual, sin asumir ninguna naturaleza lógica que la distinga de manera esencial de las propiedades y relaciones no lógicas. De la misma manera, mi somera caracterización de las propiedades matemáticas en la segunda sección de este artículo no descansa más que en un reporte de las prácticas matemáticas actuales (apoyada en el trabajo de Stewart Shapiro y Penelope Maddy), sin asumir ninguna “esencia” de lo matemático. Los resultados de estas aproximaciones naturalistas son suficientes para el objetivo central de este texto: clarificar el carácter matemático, formal y simbólico de la lógica matemática, tal y como ésta se practica hoy en día.

usa herramientas matemáticas. En este sentido, la lógica matemática lo es en el mismo sentido que lo es, digamos, la mecánica newtoniana. En ambos casos, el método es matemático, pero ellas mismas —las ciencias mismas— *no* son matemáticas, pues su objeto de estudio pertenece a una realidad independiente. Qué tan independiente sea esta realidad depende de la posición que uno quiera tomar respecto del carácter objetivo de la lógica. Para acentuar el contraste entre objeto de estudio y herramientas, presentaré el quehacer de la lógica matemática en el marco de un realismo lógico de tipo metodológico.

Este marco realista se desarrolla en la sección 1 de este artículo, para posteriormente, en la sección 2, explicar con más detalle la separación entre el objeto de estudio de la lógica y sus herramientas matemáticas. La sección 3 está dedicada a explicar la naturaleza matemática de estas herramientas. Aclarar su naturaleza servirá también al propósito de puntualizar en qué sentido se dice que esta lógica matemática es *formal* y *simbólica*. Para lograr esto, trazaré una liga histórica entre el desarrollo de lo formal y lo simbólico en matemáticas y el origen y desarrollo de la lógica moderna. Si bien creo que lo dicho en las primeras dos secciones de este artículo no es en lo absoluto original ni innovador, sino, por el contrario, expresa sólo la opinión común de la mayoría de los lógicos filosóficos actuales, esta última sección, en contraste, tiene el objetivo de desmantelar ciertos mitos sobre el carácter formal y simbólico de la lógica matemática.

1 . *El marco realista*

1 . 1 . Realismo lógico

En una discusión reciente,[2] mi colega Ivan Antonowitz usó una excelente analogía para explicar el objeto de estudio de la lógica. Dijo que los pensamientos son a la lógica lo que la visión es al espectro electromagnético. Mientras que, sin el auxilio de instrumentos, lo que captamos a través de la vista es sólo un sector del espectro electromagnético, así también nuestro pensamiento, por sí sólo, es incapaz de captar la totalidad de las conexiones lógicas entre teorías, proposiciones, conceptos, etc. Esta afirmación contiene de manera condensada la tesis central de lo que se ha llamado *realismo lógico*: la idea de que las conexiones lógicas, el objeto de estudio de la lógica, tienen una existencia objetiva, cuyo descubrimiento y estudio sistemático es el objetivo de la ciencia lógica.

Michael D. Resnik (2000) caracteriza esta noción de realismo lógico de la siguiente manera:

[2] El 25 de febrero del 2002, para ser más exactos.

> El realismo lógico está comrpometido con al menos dos tesis: primero, es una cuestión de hecho la de si algo es una verdad lógica, una inconsistencia lógica o si implica lógicamente alguna otra cosa. (Podemos formular esto de una manera menos controversial diciendo que las afirmaciones sobre verdad lógica, etc., son verdaderas o falsas.) Segundo, que tales hechos (o los valores de verdad de tales afirmaciones) son independientes de nosotros, de nuestra estructura psicológica, de nuestras convenciones lingüísticas y de nuestras prácticas inferenciales. En otras palabras, el realismo lógico afirma que los asuntos de la lógica son más bien cuestiones de hechos, y que esos hechos no se fundan en nosotros ni en nuestras prácticas. (p. 181)[3]

Sin embargo, esta manera de presentar la objetividad de la lógica como cierto tipo de independencia equivoca la relación entre lógica, lenguaje, pensamiento y práctica inferencial. La lógica, aún bajo supuestos realistas, no presume completa independencia de estos aspectos. Por lo tanto, es necesario hacer ciertas aclaraciones respecto del sentido en que la lógica es independiente del pensamiento, el lenguaje y nuestras prácticas inferenciales concretas.

En su respuesta a "How Are Objective Epistemic Reasons Possible?" (Bogghossian 2001), C. Wright (2001) deja claro que la verdadera antítesis de la objetividad no es el escepticismo, sino el relativismo. Si la lógica no fuera objetiva, no dejaría de ser conocimiento, sino que sus verdades pasarían a ser relativas: relativas a la factura psicológica del hombre, a sus convenciones lingüísticas y su práctica inferencial.[4]

Dado que el objeto de estudio de la lógica es una serie de propiedades —como validez lógica— y relaciones —como relaciones de equivalencia, consecuencia, incompatibilidad lógica, etc.— entre entidades como teorías, proposiciones, conceptos y demás, el realismo lógico está comprometido con la existencia objetiva de estas relaciones y propiedades. En términos de Resnik, estamos comprometidos con la objetividad de los hechos lógicos. Esta objetividad se sustancializa en términos de su independencia de aspectos tales como las convenciones lingüísticas, la psicología humana y las prácticas inferenciales de agentes racionales concretos. Sin embargo, debemos notar que el compromiso con la objetividad e independencia de estos hechos no implica un compromiso con la objetividad y absoluta independencia de los objetos que en ellos ocurren. Por ejemplo, el realismo lógico afirma que ciertas proposiciones se siguen de manera objetiva de

[3] Este artículo es el desarrollo de una sección homónima de Resnik 1987 (pp. 162–166), cuya definición de realismo también es refinada en Resnik 2000.

[4] Como aquí no me ocupo de la objetividad de la justificación del conocimiento lógico, sino de la objetividad de su contenido, el resto de la discusión entre Wright y Boghossian es irrelevante para el problema del realismo lógico tal y como aquí lo entiendo. La única conclusión que quiero rescatar de su discusión es que la objetividad no es una propiedad epistémica, sino metafísica.

otras, pero no que dichas proposiciones existan de manera completamente independiente de las particularidades concretas de nuestro lenguaje, pensamiento o prácticas inferenciales. En general, el realismo lógico no se compromete con la existencia objetiva e independiente de objetos tales como teorías, proposiciones, conceptos o modelos.[5] A decir verdad, es indiferente a su estatus ontológico.

Esta situación es común a todas las ciencias con pretensiones de objetividad. La lingüística, por ejemplo, no deja de ser una ciencia objetiva por el simple hecho de estudiar objetos y fenómenos dependientes, en un sentido fuerte, de nuestras convenciones lingüísticas. Igualmente, la psicología y la sociología tampoco pierden su carácter objetivo por ocuparse de objetos fuertemente determinados por nuestra psicología —valga la redundancia— y nuestras prácticas humanas. Su objetividad descansa en otro lado.

Por otro lado, si bien el realismo lógico es indiferente al estatus ontológico de los objetos lógicos, es claro que, en la práctica lógica, los filósofos asumimos que estos objetos no son meramente lógicos, sino que también existen en otras dimensiones de la realidad. La gran mayoría de los lógicos asumimos que las proposiciones, los conceptos, etc., tienen otros aspectos aparte de los estudiados por nuestra disciplina. No somos pocos los que creemos que los enunciados expresan proposiciones (relativas a un contexto de emisión asertiva), o que ellas son el contenido de algunos de nuestros pensamientos, o que están involucrados de alguna manera en los procesos de inferencia. Algo similar puede decirse de los conceptos y del resto de los objetos cuyas propiedades estudiamos.[6] Asumir esto nos permite creer en la aplicabilidad de nuestra ciencia. Si no creyéramos, por ejemplo, que contamos con algún mecanismo cognitivo que nos permite capturar conexiones lógicas entre los contenidos de nuestros pensamientos, no podríamos decir que la lógica tiene algo que decir sobre la validez de nuestros razonamientos. Igualmente, sin asumir la capacidad de nuestro lenguaje para expresar proposiciones, no podríamos aplicar la lógica a argumentos y enunciados del lenguaje natural. En este sentido, la aplicabilidad de la lógica va en contra de la completa independencia de los objetos lógicos, pero no en contra de la objetividad de sus hechos.

Ahora bien, si por un lado aceptamos que existen hechos psicológicos, lingüísticos y sociales *objetivos*, y por el otro, que los objetos lógicos *pueden*

[5] De ahora en adelante los llamaré *objetos lógicos*. Sin embargo, debe quedar claro por el contenido de esta sección que cuando sostengo la independencia objetiva de los hechos lógicos, no estoy argumentando por la existencia independiente de sus objetos.

[6] Es importante notar que esto no entra de manera alguna en contradicción con la dimensión antipsicologista del realismo lógico, tal y como lo muestra Palmer 1988 en su primer capítulo, donde cita a Moore: “Los conceptos son objetos posibles de pensamiento; pero esto no es una definición de ellos. Simplemente establece que pueden entrar en relación con alguien que piensa; y para que *puedan* hacer algo, deben ya *ser* algo” (Moore 1899, p. 179) *apud* p. 13.

estar ejemplificados en objetos lingüísticos, psicológicos o socialmente determinados, ¿en qué sentido requiere la objetividad lógica independencia de la psicología, la lingüística y la sociología? ¿Qué relación existe entre objetividad e independencia? La respuesta es sencilla. La objetividad de la lógica descansa en la autonomía de sus hechos. Descansa en la independencia de su dominio de hechos, no de su dominio de objetos. En otras palabras, la lógica es objetiva porque los hechos lógicos no son (reducibles a) hechos psicológicos, sociales o lingüísticos.

1.2. Objetividad y realismo

De acuerdo con Resnik, la objetividad de los asuntos de la lógica es una de las razones más fuertes a favor del realismo lógico. Sin embargo, presentar las cosas de esta manera es equívoco, ya que sostener el realismo lógico *no es sino* reconocer la objetividad de la lógica. Resnik mismo lo concede al distinguir entre la explicación realista de la objetividad de la lógica, y la posición antirrealista que tan sólo trata de explicar la *aparente* objetividad de la misma (Resnik 1987, p. 185). En su "Realist Manifesto", Shapiro (1997) hace la misma conexión entre realismo y objetividad con respecto a las matemáticas. En ese artículo, Shapiro presenta implícitamente el realismo como la única posición consistente con la objetividad de las matemáticas. De acuerdo con él, el antirrealista no puede explicar la objetividad de un conocimiento, sino tan sólo su *aparente* objetividad. Aceptar la objetividad, *at face value*, es ya tomar una posición realista.

Sin embargo, también es importante reconocer que la adopción del realismo lógico no implica comprometerse con un *monismo lógico*, es decir, con el "supuesto generalizado en la filosofía contemporánea de la lógica de que existe una lógica verdadera, que existe una y sólo una respuesta correcta a la pregunta de si un argumento es [deductivamente] válido" (Beall y Restall, en prensa). En otras palabras, el realismo no se encuentra en oposición al *pluralismo*,como Beall y Restall ya lo han reconocido cuando dicen: "Muchas apelaciones a la 'Validez Real' apelan a una validez *real*; pero no a la *única* validez real."[7]

Si bien es cierto que el pluralismo lógico es un tipo de relativismo, en tanto rechaza la idea de una validez absoluta, no se encuentra en oposición al realismo y la objetividad de los hechos lógicos porque no relativiza la validez a elementos extralógicos, como las ya mencionadas convenciones lingüísticas o la arquitectura psíquica. El pluralismo lógico simplemente reconoce que la validez puede ser predicada sólo con relación a ciertas condiciones *lógicas*. En este sentido, el pluralismo lógico es un tipo de *relativismo interno*, y por lo tanto, es compatible con el realismo.

[7] "Many appeals to 'Real Validity' are appeals to *real* validity; they are not, however, appeals to the *only* real validity" (2000, p. 481).

1.3. Lógica formal e informal

Lo que sí es acertado de la crítica de Resnik es que plantea la normatividad como un problema para el realismo lógico:

> Por otro lado, la posición realista tiene mucho más que explicar [que las posiciones rivales antirrealistas]: debe explicar también cómo estos hechos [lógicos] están relacionados con nuestros valores lógicos. Tiene que explicar por qué, por ejemplo, un argumento es incorrecto —lo cual parece ser una cuestión de valor— si sus premisas no implican lógicamente su conclusión —lo cual es (supuestamente) una cuestión de hecho. (Resnik 2000, p. 185)

Para responder a esta crítica es necesario echar mano de la distinción entre lógica formal e informal.

En "How Philosophical Is Informal Logic?", John Woods (2000) establece un paralelismo entre la distinción entre la lógica formal y la informal y la distinción entre la lógica tal como la entendía Aristóteles y la lógica tal como se entiende a partir de Gottlob Frege. Según Woods, la silogística aristotélica era sólo una parte del proyecto lógico aristotélico, donde el objetivo final de este último era establecer una teoría de las refutaciones.

> Aristóteles valoraba su lógica por el papel que desempeñaba dentro de una teoría más general de la argumentación. La teoría de los silogismos sería el centro lógico de una teoría más amplia; pero nunca estuvo en sus perspectivas identificarlas a ambas. El padre de la lógica deseaba, entre otras cosas, una teoría de la refutación, una teoría que fijara la distinción entre buenas refutaciones y refutaciones que sólo parecían buenas, o como el mismo Aristóteles lo diría, entre refutaciones genuinas y sofismas. (Woods 2000, pp. 139–140)

En contraste, la empresa lógica de Frege no era la construcción de una teoría de la argumentación, sino de la *validez*. Según Woods, "lógica" en el sentido aristotélico significaba teoría de la argumentación, mientras que en Frege, "lógica" significaba teoría de la validez o consecuencia lógica. También de acuerdo con Woods, esta distinción sobrevive en la distinción contemporánea entre la *lógica formal* e *informal*. Si bien la lógica formal se ha extendido y diversificado de manera considerable desde los días de Frege,[8] Wood tiene razón al señalar que la lógica formal contemporánea es heredera directa de su teoría de la validez, mientras que la lógica informal continúa la tradición Aristotélica y desciende de la teoría de la argumentación.

[8] El ámbito de estudio de la lógica matemática actual ya no se reduce al mero estudio de la validez formal de pruebas matemáticas (como Frege lo había sostenido). En esta sección, al igual que Woods, me centraré en el caso de la validez formal, porque sirve como un buen ejemplo para resaltar el contraste entre lógica formal e informal. En la siguiente sección revisaremos con mayor detalle el amplio campo de estudio de la lógica matemática.

> En el contexto de una teoría de la argumentación [lógica informal], una posibilidad es reservar el nombre general de lógica [lógica formal] para designar una teoría o subteoría enfocada a las propiedades de las *proposiciones* (*v.gr*. la verdad lógica) y series de proposiciones (por ejemplo, la consistencia), así como las propiedades con las que uno se encuentra en su correspondiente metateoría (*v.gr*. decidibilidad). (Woods 2000, p. 149)

La distinción entre argumento en el sentido de la lógica informal como una práctica humana y argumento en el sentido lógico formal de secuencia de proposiciones es básica para entender la distinción entre la lógica formal y la informal. Vale decir, por lo tanto, que el realismo lógico por el que aquí abogo se limita a los objetivos y las propiedades de la lógica formal y que, a menos que explícitamente indique otra cosa, cuando hable de lógica haré referencia a la lógica formal en este sentido.

Una distinción paralela es la distinción entre inferencia y consecuencia lógica. La inferencia es un proceso cognitivo en el que se obtiene cierta información a partir de información previa. Dado que la mayoría de las teorías contemporáneas de la proposición las ven como entidades informáticas, se dice que en un proceso de inferencia se infieren ciertas proposiciones de otras. La inferencia así concebida debe distinguirse claramente de los argumentos en el sentido lógico formal. En su concepción formal, un argumento es un conjunto de proposiciones, una de las cuales es la conclusión y el resto son las premisas. Es un error común concebir la conclusión como aquella proposición que se infiere de las premisas. Como queda claro por el estudio de inferencias abductivas,[9] la inferencia puede ir tanto en el sentido de las premisas a la conclusión, como de la conclusión a las premisas. En consecuencia, el resultado de la inferencia es la construcción o compleción de un argumento. Como tal, el argumento resultante puede ser evaluado a partir de las normas de la lógica formal, ya sea como *válido* o como *no válido*. Vale la pena recordar que un argumento es válido si la conclusión se sigue de manera lógica de las premisas. Por extensión, decimos que una inferencia es lógicamente válida si determina un argumento válido.

El sentido normativo de la lógica se explica a partir del hecho de que uno de los objetivos de la inferencia es capturar una relación de consecuencia lógica.[10] Por ello, podemos evaluar la inferencia en función de su éxito en captar esta relación. Una inferencia es válida si determina un argumento válido, es decir, aquel donde la conclusión se sigue de manera lógica de las premisas. En este sentido, podemos entender la inferencia como la predicación de una relación lógica entre proposiciones. La predicación es correcta,

[9] Aliseda 1997, Xiang 2002 y Neal 2000.

[10] Digo que es tan sólo *uno* de los objetivos porque la inferencia se persigue también con otros objetivos. De ello se sigue que la inferencia no puede ser evaluada tan sólo en términos de su validez. Sin embargo, de ello no se sigue que la validez pierda sentido como criterio evaluativo de las inferencias.

o verdadera, si la relación predicada efectivamente se da entre los objetos. Decir que esto es un misterio, como Resnik parece sugerir, es creer que hay un misterio en la sede misma de la noción de predicación verdadera. Sin embargo, no existe confusión ni misterio entre las dimensiones normativas y descriptivas de la noción de verdad. La validez, en este sentido, es completamente análoga.

Sin embargo, no debemos llevar demasiado lejos esta analogía entre predicación e inferencia. Debemos tener cuidado de no pensar que la validez es un tipo de verdad, o que la inferencia involucra algún tipo de afirmación (de validez). Al hacer una inferencia, uno se compromete con la corrección de la misma, mas no *afirma* la existencia de esta relación. En este sentido, la inferencia no describe cierta relación lógica entre proposiciones, sino que la asume.[11]

Comúnmente, los términos como "razonamiento", "argumento", "inferencia" y "convencimiento" se reservan para las teorías lógicas informales, mientras que el vocabulario de la lógica formal está poblado por términos como "proposición", "implicación" y "consecuencia".

2. *El objeto de estudio de la lógica y sus herramientas matemáticas*

2.1. Lógica y matemáticas

Introduzco el tema del realismo lógico, porque es más fácil entender la naturaleza matemática de la lógica desde un punto de vista realista. Esto no quiere decir que la única manera de entender el carácter matemático de la lógica matemática es tomando una posición realista.[12] Lo que voy a decir aquí no compromete con una posición realista. La mejor manera de interpretar mis argumentos es pensándolos en términos de un realismo *metodológico* en vez de un realismo fuerte. Uso aquí la noción de realismo metodológico [*working realism*] en el sentido desarrollado por Stewart Shapiro en su *Philosophy of Mathematics* (1997).

> El realismo metodológico es una descripción de cómo se hacen las matemáticas, pero muestra poco interés en responder las cuestiones que inspiran la

[11] Agradezco a Raymundo Morado haberme señalado este punto.

[12] Tampoco quiere decir que la objetividad que establece el realismo en lógica *sea la diferencia* que distinga lógica y matemáticas. En ningún momento sugiero que la matemática no es objetiva, mientras que la lógica sí. Más adelante, cuando digo que el mérito de los sistemas formales de la lógica queda determinado por su éxito en la explicación y descripción fidedigna de sus objetos, no implico que algo similar no pueda decirse en el caso de las matemáticas. Por supuesto que es posible sostener que el mérito de un sistema aritmético, por ejemplo, queda determinado por su éxito en la aplicación y descripción fidedigna de los números naturales. En la lógica, el realismo no es incompatible con el realismo (ni con el antirrealismo) en matemáticas. Como explicaré en la siguiente sección, la diferencia se establece en términos de la relación entre estos objetos y las teorías (lenguajes y lógicas) que desarrollamos para estudiarlos. Tomar una posición realista en lógica nos permite hacer más clara esta diferencia.

> filosofía de las matemáticas. El realismo metodológico, en sí mismo, tiene escasas consecuencias, si no es que ninguna, para la semántica, la ontología y la manera de aplicar las matemáticas en las ciencias. La versión más fuerte del realismo metodológico no plantea más que las matemáticas pueden (o deberían) llevarse a cabo *como si* su objeto de estudio fuera un ámbito de entidades con existencia independiente, abstractas y eternas (o intemporales). Pero eso es todo. El realismo metodológico es consistente con el antirrealismo [...]. Cualquiera que no busque corregir las matemáticas de hoy en día es probablemente, en algún nivel, un realista metodológico. (Shapiro 1997, pp. 37–38)

Por supuesto, Shapiro está hablando en términos de matemáticas. Sin embargo, lo mismo puede sostenerse en el caso de la lógica. El realismo lógico metodológico es una tesis descriptiva del trabajo lógico filosófico. Sostiene que los lógicos trabajamos *como si* los objetos y las conexiones lógicas que estudiamos entre ellos existieran de manera objetiva. En este sentido, así como el realismo matemático metodológico es la posición estándar entre los matemáticos de hoy en día, así también el realismo lógico metodológico es la posición estándar en la lógica contemporánea. Tal vez no lo es en la ciencia o en el sentido común, como Resnik afirma (2000, p. 184), pero es irrelevante para lo que aquí escribo. En tanto que el objetivo de este artículo es clarificar el papel que las matemáticas desempeñan en el quehacer lógico, o qué tan matemática es la lógica matemática *tal y como la hacemos hoy en día*, asumir un realismo lógico metodológico es suficiente.

Entonces, desde el punto de vista realista, la lógica aparece como una disciplina teórica filosófica, separada de las matemáticas. Su objetivo específico es el estudio de las propiedades (y relaciones) lógicas de entidades como conceptos, proposiciones, argumentos, teorías, modelos, etc. Dado que estas propiedades y relaciones lógicas son independientes de los sistemas lógicos que utilizamos para estudiarlas, debemos ver la lógica filosófica como una ciencia teórica. Es por ello que el mérito de los sistemas formales de la lógica queda determinado por su éxito en la explicación y descripción fidedigna de sus hechos objetivos.

Entre las relaciones y propiedades lógicas que conforman el objeto de estudio de la lógica, la *incompatibilidad*, la *verdad*, la *falsedad* y la *equivalencia* lógicas son consideradas como las más *básicas* o *clásicas*. Entre ellas, la validez y la consecuencia lógica —en un sentido amplio— son la propiedad y la relación fundamentales.[13] Estas propiedades y relaciones son *básicas*

[13] Esta definición de lógica, por supuesto, es una elaboración de la definición de Quine, para quien el quehacer de la lógica es explorar conexiones determinantes entre "qué secuencias satisfacen los enunciados simples" y "qué secuencias satisface cualquier enunciado compuesto" (1970, p. 48). Las relaciones de este tipo son: (i) implicación lógica; (ii) incompatibilidad lógica, (iii) verdad lógica, (iv) falsación lógica, y (v) equivalencia lógica. "Podemos subordinar adecuadamente esta familia de nociones a uno de sus miembros, la noción de *verdad*

porque se predican de objetos lógicos básicos, *i.e.* los conceptos y las proposiciones. Además de estas propiedades y relaciones básicas, también existe una larga serie de propiedades y relaciones lógicas *derivadas* o *metalógicas*, como consistencia, decidibilidad, compacidad, incompletud, etc., que se predican de objetos lógicos más complejos, como definiciones, teorías, modelos, lenguajes, etc. Llamo a estas propiedades y relaciones "derivadas" porque su carácter lógico se deriva de su relación con las propiedades y relaciones lógicas básicas. La consistencia, por ejemplo, es importante para la lógica, porque sin ella no podríamos distinguir lógicamente entre proposiciones. En una teoría inconsistente, todas las proposiciones serían lógicamente equivalentes entre sí, y la relación de consecuencia lógica se volvería trivial. En muchos casos, sin embargo, es difícil ver la conexión entre propiedades lógicas básicas y derivadas. Para ello es necesario tener una visión más amplia del complejo espectro de estudio de la lógica matemática.

Las propiedades lógicas derivadas se dividen en tres grandes tipos, dependiendo del área de la lógica matemática a la que pertenecen. Así, pueden pertenecer a la teoría de modelos, a la teoría de pruebas o a la teoría de la recursión (Barwise 1977). La primera estudia las relaciones matemáticas fundamentales entre los enunciados de una teoría (comúnmente matemática) y las estructuras matemáticas que las hacen verdaderas. Así pues, su relación con las cuestiones básicas de la lógica formal es evidente. Baste recordar que una de las definiciones clásicas de consecuencia lógica hace que una proposición sea consecuencia lógica de otra si todo modelo que hace a la primera verdadera, también hace verdadera a la segunda. Aun nociones tan esotéricas como *compacidad* o *ultraproducto* derivan su importancia lógica (es decir, justifican su lugar dentro de la lógica matemática) de su relevancia para este fin.

La razón principal por la cual las nociones centrales de la teoría de modelos parecen estar tan alejadas de las de la lógica formal, tal y como ésta se practica fuera de los departamentos de matemáticas, es por su predilección por el lenguaje y las herramientas del álgebra abstracta. Sin embargo, no debemos dejarnos confundir por esta circunstancia. Por lo menos desde Boole, el álgebra ha sido una herramienta esencial en la lógica formal. No debemos olvidar que el sistema de lógica algebraica desarrollado por Boole (1847) fue tanto el primer ejemplo de una lógica no numérica como el de una lógica formal, y ha desempeñado así un papel esencial tanto en el desarrollo del álgebra abstracta como en el de la lógica matemática. Si bien estas disciplinas se desarrollaron por largo tiempo de manera aislada, desde mediados de los años treinta la relativa equivalencia entre el lengua-

lógica. Su ventaja sobre la implicación es que toma enunciados solos en vez de parejas de ellos. Las otras nociones pueden obtenerse a partir de la verdad lógica. . ." (Quine 1970, p. 49). Sin embargo, mientras que Quine considera fundamental la noción de verdad lógica, yo pongo la implicación lógica en el centro de las relaciones y propiedades lógicas clásicas.

je *asertivo*, preferido por la mayoría de los lógicos en filosofía, y el lenguaje *relacional* del álgebra abstracta ha quedado firmemente establecida.[14] Por ejemplo, mientras los lógicos no algebraicos —también conocidos como *logicistas*— prefieren hablar de *sistemas deductivos*, los algebristas prefieren usar el termino algebraico *filtro*. Mientras unos hablan de *interpretaciones*, los otros hablan de *homomorfismos*, etc.[15] Con estas equivalencias terminológicas bajo el brazo, el lenguaje algebraico de la teoría de modelos contemporánea pierde mucho de su carácter esotérico para revelar su carácter eminentemente lógico.

De la misma manera, la teoría de pruebas no es otra cosa que el estudio matemático de la noción lógica de derivación, una de las herramientas esenciales, como hemos visto, del aparato formal de estudio de la validez lógica. La teoría de la recursión, a su vez, puede verse también como el estudio de un aspecto importante de las derivaciones y las definiciones: su computabilidad. Como veremos en la última sección de este artículo, la computabilidad desempeña un papel esencial dentro de la lógica formal, y en el estudio efectivo de la validez y otras propiedades lógicas básicas.

2.2. ¿Qué es la lógica matemática?

Podemos, entonces, empezar por distinguir tres sentidos básicos de la frase "lógica matemática":

1. "Lógica matemática" como *lógica matematizada*, es decir, como lógica que utiliza métodos y herramientas matemáticas.

2. "Lógica matemática" como la *parte matemática* de la lógica (matematizada).

3. "Lógica matemática" como *lógica de las matemáticas*, es decir, la rama de la lógica que se encarga del estudio de la lógica que se usa dentro del razonamiento y la argumentación matemáticas. Por extensión, a veces también se usa esta frase para referirse a la tradición lógica

[14] La distinción fue hecha en estos términos por Curry (1963).

[15] Baste recordar que los conjuntos de fórmulas que constituyen una teoría deductiva (cerrada bajo adición y silogismo disyuntivo) forman un filtro dentro del álgebra de las fórmulas del mismo. De manera similar, la función de interpretación en lógica logicista corresponde a cierto tipo de homomorfismo entre álgebras (una corresponde al lenguaje y otra a la semántica del lenguaje). Siguiendo esta misma línea de razonamiento, propiedades derivadas simples como la consistencia y la completud también pueden sustituirse por su análogo algebraico dependiendo de si el álgebra del lenguaje se encuentra *libre* (en el caso de la completud) o *en* (en el caso de la consistencia) cierta subclase adecuada de álgebras. Por supuesto, lo dicho en esta sección apenas toca de manera muy superficial la fuerte relación entre los lenguajes algebraicos y logicista de la lógica. Un excelente estudio de esta relación, que cubre desde cuestiones tan básicas como las aquí mencionadas hasta los más sofisticados resultados recientes, se encuentra en Dunn y Hardegree (2001).

que coloca este tipo de argumentos y razonamientos en el centro del estudio lógico, ya sea como paradigmas o tipos *clásicos*.

En la mayor parte de este artículo me ocuparé de la lógica matemática en el primer sentido, es decir, como lógica matematizada, ya que es en ella donde se sitúa la gran confusión que quiero elucidar en este texto. La fuente principal de esta confusión entre lógica y matemáticas es el método matemático que se utiliza en la lógica formal. Para evitar esta confusión, basta con ser cuidadoso *cuando se distingue* entre ciencia (lógica) y método (matemático). La lógica es una ciencia filosófica y parte de su método es matemático. De esta manera, la lógica matemática es matemática en el mismo sentido que lo es, digamos, la mecánica newtoniana. En ambos casos, el método es matemático, pero ellas mismas *no* son matemáticas. Por principio de cuentas, las teorías de ambas ciencias cargan un peso verificativo. Sus resultados no dependen de manera exclusiva de los principios postulados por ellas mismas, sino de su capacidad de explicar, de manera científica, fenómenos que les son externos e independientes.

Otra distinción importante que debe hacerse respecto del método matemático —de la ciencia en general, y de la lógica en particular— es la de sistemas lógicos formales, también llamados teorías formales, y teorías lógicas (filosóficas) propiamente dichas. Un sistema lógico formal es una entidad matemática compleja. Tradicionalmente, se compone de un alfabeto, un conjunto de fórmulas bien formadas, un conjunto de reglas de inferencia y, en algunos casos, de un conjunto de axiomas. En tanto objeto matemático, todo sistema lógico formal tiene propiedades matemáticas. Algunas de ellas (las así llamadas *propiedades sintácticas*) son internas, mientras que otras (las así llamadas *propiedades semánticas*) son externas, es decir, se predican tan sólo en relación con otro sistema matemático (a veces meramente posible) comúnmente llamado su *modelo*.[16] Algunas de las propiedades matemáticas de los sistemas formales pueden expresarse como propiedades, relativas-al-sistema, de alguno de sus elementos. Por ejemplo, cuando uno dice que $\forall x(Px \supset (Qx \supset Px))$ es un axioma del sistema L de la lógica de primer orden, esto puede entenderse tanto como una propiedad del sistema formal L —que tiene esa fórmula como una de sus premisas—, como una propiedad de la mentada fórmula —que es un axioma— relativa a L. En este sentido puede decirse que los sistemas lógicos formales "afirman, o preferentemente prueban, resultados acerca

[16] A este último tipo de sistemas matemáticos también puede llamársele "sistemas formales", pues su papel en la lógica matemática es completamente análogo al de los sistemas lógicos formales tradicionalmente concebidos. Sin embargo, en la lógica contemporánea, el término "sistema formal" suele aplicarse sólo a sistemas del primer tipo. En consecuencia, en este artículo tomo los sistemas lógico-formales en su acepción tradicional, esto es, considerando sólo su así llamada *sintaxis*.

de sus expresiones simbólicas (en jerga moderna, las 'fórmulas' de su 'lenguaje')" (Kirwan 1995). Llamemos *locales* a este tipo de propiedades, y *globales* a aquellas que no pueden expresarse más que como propiedades del sistema lógico formal en su conjunto. Ser un teorema o un axioma son ejemplos paradigmáticos de propiedades locales, mientras que la compacidad, decidibilidad, etc., son ejemplos típicos de propiedades globales de los sistemas lógicos formales.

Es muy importante no confundir estas propiedades matemáticas de los sistemas formales con propiedades lógicas propiamente dichas. Las relaciones de las que empezamos hablando como objeto de estudio de la lógica —la consecuencia lógica, la verdad lógica, etc.— no son meramente propiedades matemáticas definidas dentro de un sistema formal, sino relaciones y propiedades lógicas reales que se dan de hecho entre entidades lógicas (conceptos, proposiciones, teorías, etcétera). Estos sistemas formales son matemáticos, por supuesto, pero no son lógicos sino hasta ser aplicados al estudio de relaciones y propiedades lógicas reales. En tal aplicación lógica, las propiedades matemáticas locales de los sistemas formales sirven de modelo de las propiedades lógicas básicas, mientras que las propiedades metalógicas son modeladas por las propiedades globales.

En este respecto, el objetivo de los sistemas lógicos formales es construir una correspondencia entre propiedades lógicas y matemáticas. Esta correspondencia se crea cuando se establece un mecanismo, a veces muy complejo, de representación de las entidades lógicas cuyas propiedades serán modeladas por algún tipo de entidades matemáticas constituyentes del sistema formal. Tradicionalmente, esto implica representar proposiciones mediante fórmulas, argumentos por medio de secuencias de fórmulas, y teorías mediante conjuntos de fórmulas. Este mecanismo es comúnmente llamado "formalización" o "simbolización", y se dice que las entidades matemáticas "formalizan" o "simbolizan" las entidades lógicas que representan.

También es necesario establecer una correspondencia análoga en el nivel de propiedades. Es necesario representar las propiedades lógicas conforme a las propiedades matemáticas. Comúnmente esto se logra estableciendo una correspondencia uno-a-uno entre la propiedad matemática de ser un teorema y la propiedad lógica de ser lógicamente verdadera, entre la propiedad matemática de deducibilidad y la propiedad lógica de validez, etc. Para hablar de esta correspondencia también se usan los términos "formalización" y "simbolización". Lo que estas dos correspondencias establecen es una *aplicación lógica* del sistema formal. Una vez que estas correspondencias hayan sido establecidas podemos hablar entonces de una verdadera *teoría lógica* (matematizada). Una teoría lógica matematizada, en este sentido, incluye tanto el sistema formal como su aplicación lógica.[17] En

[17] Nótese que esta última es esencial.

consecuencia, una teoría de lógica matemática no es más que un sistema formal aplicado al estudio de la lógica.

Idealmente, la correspondencia entre lógica y sistema formal debe ser tal que si a y P simbolizan, respectivamente, una entidad lógica y una propiedad lógica, entonces a tiene la propiedad P en caso y sólo en caso, de que la entidad lógica simbolizada por a tenga la propiedad lógica simbolizada por P. Por ejemplo, en la aplicación tradicional de sistemas lógicos formales correctos,[18] una fórmula es teorema del sistema si y sólo si la proposición que ella simboliza es una verdad lógica en ese mismo lenguaje. Lo que no queremos es que existan relaciones matemáticas donde no haya relaciones lógicas del tipo correspondiente, o que alguna propiedad lógica (simbolizable) escape de nuestro modelo matemático.[19]

La presente distinción entre el sistema formal meramente matemático, sus propiedades metalógicas y su aplicación lógica es análoga a la distinción que Raymundo Morado hace en "La rivalidad en lógica" (1984) entre "sistema lógico", "metalógica" y "filosofía de la lógica".[20] Escribe Morado:

> Entenderé por la expresión "una lógica *X*" algún conjunto en particular que comprehenda un sistema lógico (entiendo que éste incluye tanto una sintaxis como una semántica), una metalógica en la que se ubican los metateoremas sobre el sistema, y una filosofía de la lógica que trate de esclarecer la trama de relaciones entre el sistema lógico, el pensamiento y la realidad.[21]

Distinguir la realidad lógica, objeto de nuestro estudio, de la teoría lógica con la que la estudiamos y la herramienta matemática que usamos para construirla es más importante (pero, al mismo tiempo, más difícil) en el caso de las propiedades metalógicas. Cuando probamos la consistencia de una teoría dada T_1 construyendo un modelo apropiado dentro de una teoría matemática T_2, por ejemplo, trabajamos, en realidad, con *cinco* teorías distintas: la teoría objeto T_1, una teoría metalógica T_3, y tres teorías matemáticas. Estas tres teorías matemáticas proveen el aparato matemático

[18] Consistentes y completos.

[19] Es importante que estos deseos no se confundan con las así llamadas propiedades metalógicas de corrección y completud. Estas últimas son propiedades matemáticas de los sistemas lógicos formales, mientras que los primeros son virtudes de los sistemas formales como partes de nuestras teorías lógicas.

[20] Morado encuentra antecedentes de esta distinción en el trabajo de Lungarzo (1984). Mi distinción, en cambio, se inspira en el trabajo de Kirwan (1995) sobre los diferentes tipos de verdades lógicas.

[21] Morado 1984, p. 238. Pese a lo que podría sugerir esta cita aislada, Morado no cree que toda "lógica" sea de este tipo, es decir, que toda lógica sea matematizada en el sentido que yo le doy. La afirmación de Morado debe entenderse en el contexto de su discusión de la rivalidad en lógica. En el artículo citado, Morado estudia la rivalidad de lógicas que son, de hecho, matematizadas. Sin embargo, de ello no se sigue que toda lógica sea matematizada.

para realizar la prueba formal. En primer lugar, se trabaja dentro del marco general de una teoría metalógica T_3 (la teoría de modelos tipo Tarski), según la cual la existencia de un modelo para una teoría dada demuestra su consistencia. Esta teoría metalógica T_3, a su vez, usa las herramientas de otra teoría matemática T_4 (la teoría de conjuntos) para formalizar la relación lógica *ser un modelo de*. Para poder aplicar este aparato matemático a T_1, T_3 usa un modelo matemático T_5 de T_1 (donde T_5 es la formalización de T_1). Luego establece una relación matemática (en T_4) entre las teorías matemáticas T_2 y T_5, la cual formaliza la relación lógica *ser un modelo de* entre T_2 y T_1. De esta manera se demuestra formalmente la consistencia lógica de T_1.[22]

Estamos ahora en posición de detallar un poco más la distinción que hicimos antes entre los tres sentidos de la frase "lógica matemática". La lógica matemática, en el segundo sentido, es decir, como lógica de las matemáticas, es el estudio de las relaciones y propiedades lógicas de teorías, pruebas, modelos, proposiciones y conceptos matemáticos.[23] La lógica matemática en el tercer sentido es, en realidad, una rama de la matemática, no de la lógica. La lógica matemática en este último sentido se dedica al estudio de los sistemas formales de la lógica como meros sistemas matemáticos, no lógicos. Estudia las propiedades formales del tipo de sistemas matemáticos que se utilizan, o en principio podrían utilizarse, en lógica. En este sentido, esta lógica matemática sólo se interesa en las primeras dos partes de la clasificación de Morado. La lógica matemática en el primer sentido, en contraste, considera las tres en conjunto.

[22] La situación no cambia ni siquiera en los casos en que la teoría objeto también es matemática, ni cuando los modelos matemáticos son subteorías (no necesariamente propias) de la teoría objeto. Es importante recordar que, en el caso de muchas teorías matemáticas, es posible formalizar algunas de sus propiedades lógicas reales dentro de las teorías mismas. La gödelización, por ejemplo, es un recurso que nos permite formalizar la relación lógica "x es una prueba correcta de y en la aritmética de Peano" dentro de la misma aritmética de Peano. Sin embargo, esta formalización no confunde la relación lógica con su modelo matemático (ni la reduce a ella). Esta última es una relación aritmética entre números, mientras que la primera sigue siendo una relación entre secuencias de proposiciones y proposiciones. Lo que la gödelización meramente demuestra es que ciertas proposiciones lógicas (sobre la probabilidad dentro de la aritmética de Peano) pueden ser *modeladas* por proposiciones matemáticas de la misma teoría aritmética. Sin embargo, tales proposiciones aritméticas siguen siendo meros modelos de las proposiciones lógicas. Siguen siendo *sobre números*, no sobre teoremas o pruebas.

[23] Tradicionalmente se identifica esta lógica con la lógica deductiva de primer orden. Sin embargo, hay también quienes sostienen que la matemática opera principalmente sobre una lógica de segundo orden, y otros que sostienen que no todo razonamiento matemático es de tipo deductivo, sino que también se realizan abducciones e inducciones.

2.3. ¿Qué son las matemáticas?

Para concluir que la lógica no es matemática no basta con señalar que tiene como objetivo el estudio de relaciones como consecuencia lógica, derivabilidad, consistencia, etc. También hace falta argumentar que estas relaciones no son matemáticas.[24] Ya he dicho que lo que distingue a las propiedades lógicas objetivas de las matemáticas es que las primeras son independientes, no sólo de nuestra arquitectura cognitiva o de nuestras convenciones y usos lingüísticos, sino también del aparato formal con el que las estudiamos. En matemáticas, en contraste, los fenómenos se constituyen por completo por medio de este aparato formal. Los objetos matemáticos y sus propiedades pueden determinarse por completo haciendo uso exclusivo de los mecanismos lógicos y lingüísticos de su teoría. En la matemática, tanto la indiscernibilidad de los idénticos como la identidad de los indiscernibles son principios aceptados como válidos. Éste es un punto que ha sido elaborado en detalle por Stewart Shapiro (1997), pero que comparten otros filósofos de la matemática contemporáneos.[25] Ahí, Shapiro desarrolla la tesis que él llama de *relatividad lógica-lenguaje-ontología*, según la cual, para toda teoría matemática T en un lenguaje L y bajo una lógica Λs,[26] $x = y$ si y sólo si para toda expresión p bien formada en L, $p]x/y]$ —la expresión resultante de sustituir x en p por y— es Λ-equivalente a p. En otras palabras, la identidad de los objetos matemáticos está completamente determinada por las propiedades que se les pueden predicar en el lenguaje de la teoría y por su papel inferencial según la lógica del mismo.

Conforme a esta caracterización, queda claro que las propiedades lógicas no son matemáticas. Para ellas no se cumple el principio de relatividad de Shapiro. Si la lógica fuera matemática, dos objetos lógicos serían lógicamente equivalentes —tendrían las mismas propiedades lógicas— si y sólo si se simbolizaran de la misma manera en cualquier sistema formal.[27] Sin

[24] Agradezco a dos árbitros anónimos su insistencia en desarrollar este punto de manera más clara y explícita. Los dos enunciados anteriores provienen *verbatim* de los comentarios de uno de ellos.

[25] Penélope Maddy, por ejemplo, lo alude en su discusión del axioma de extensionalidad de la teoría de conjuntos (1997, pp. 37–40). Para Maddy, la adopción de estos principios (el de indiscernibilidad de los idénticos y el de identidad de los indiscernibles) en matemática obedece tanto a consideraciones intrínsecas a las matemáticas como a consideraciones prácticas extrínsecas. Desde un punto de vista intrínseco, los axiomas de identidad que estos principios obedecen son considerados *analíticos* (Maddy 1997, p. 38), mientras que desde un punto de vista extrínseco, las teorías que se siguen de ellos son más *simples* (Maddy 1997, p. 40). Ni Maddy ni Shapiro proponen justificar estos princpios de manera *a priori*. Lo que presentan es meramente un diagnóstico de la práctica matemática contemporánea.

[26] Nótese que para Shapiro, y para mí también, lenguaje y lógica *pertenecen* a la teoría, no son elementos externos a ella. Teorías matemáticas en diferentes lenguajes y/o con diferentes lógicas son, de hecho, diferentes teorías.

[27] Esto se debe a que las fórmulas de un sistema formal *sí* expresan objetos matemáticos dentro del sistema formal. A estos objetos se les conoce comúnmente como *formas lógicas*.

embargo, es conceptualmente posible que dos objetos lógicos x y y tengan diferentes propiedades lógicas y, sin embargo, su diferencia no sea capturada por ningún sistema formal. En otras palabras, las propiedades lógicas no están completamente determinadas por la herramienta formal con la que las estudiamos.

Alguien podría responder que aun cuando una diferencia lógica no *haya sido* capturada por ningún sistema formal actual, de ello no se sigue que no sea formalizable, por lo menos en principio. Desde este punto de vista, aun en el caso de que se encontrase un aparente contraejemplo como el del párrafo anterior, seguiría siendo factible crear un nuevo sistema formal que sí incluyese la distinción problemática. Sin embargo, tal respuesta, lejos de refutar nuestra tesis del carácter no matemático de las propiedades lógicas, la reforzaría. El hecho de que podamos reconocer una propiedad lógica *antes* de formalizarla atestigua el carácter objetivo de tal propiedad.[28]

De esta manera, podemos ver más claramente en qué sentido la lógica matemática es matemática y en qué sentido no es *meramente* matemática. Queda aún por aclarar en qué sentido se dice también que esta lógica matemática es *formal* y *simbólica*. Ése es el objetivo de la tercera y última sección del artículo.

3. *La naturaleza matemática de las herramientas lógicas*

3.1. Una aproximación histórica al carácter formal y simbólico de la lógica matemática

Si nos preguntáramos en qué sentido es simbólica la lógica matemática, la respuesta obvia pareciera ser que la lógica matemática es simbólica precisamente porque usa símbolos. Sin embargo, dentro de las disciplinas matemáticas, no cualquier uso de símbolos califica para ser propiamente simbólico. En el estudio de la historia de la matemática se suele distinguir entre un uso *sincopado* de símbolos y un uso propiamente *simbólico*, a veces también llamado *formal* o *analítico*.[29] En *The Nature and Growth of Modern*

Para ellas sí se cumple el principio de relatividad de Shapiro. Dada una teoría lógica T, en un lenguaje formal L y bajo una (meta)lógica Λ, la forma lógica expresada por x es equivalente a la de y si y sólo si para toda expresión p bien formada en L, $p]x/y]$ —la expresión resultante de sustituir x en p por y— es Λ-equivalente a p. De esta manera, la tesis de que la lógica no es matemática se reduce a la tesis de que la identidad entre las propiedades lógicas de un objeto y su forma lógica no es "analítica" en el sentido de Maddy (1997, p. 38).

[28] Si bien es cierto que cualquier propiedad lógica es en principio formalizable, es imposible formalizar todas las propiedades lógicas de todos los objetos lógicos.

[29] La razón por la cual se usa aquí el término "formal" resultará obvio más adelante; sin embargo, en el caso del término "analítico" vale la pena hacer una aclaración histórica. El presente uso del término "análisis" tiene su origen en el sentido clásico atribuido a Pappus por los primeros algebristas occidentales. Recordemos que en la matemática del siglo XV, las

Mathematics, por ejemplo, Edna E. Kramer (1982) introduce esta distinción de la siguiente manera:

nociones de "álgebra" y "análisis" aún no adquirían sus connotaciones actuales, sino que se confundían en una sola noción que combinaba elementos propiamente matemáticos (ciertos cálculos y resultados propios de lo que hoy llamaríamos "álgebra") con otros más bien metodológicos (técnicas de resolución de cálculos provenientes de la tradición geométrica clásica). Es por ello que, por ejemplo, hablamos de la geometría cartesiana como "analítica" en vez de "algebraica". Sin embargo, conforme el álgebra y el análisis se separaron como disciplinas matemáticas y ambos términos adquirieron su significado actual, el viejo vocabulario no se modificó del todo y en algunos casos, como en el presente, se ha seguido usando el término "analítico" en su sentido primitivo.

De la misma manera, no debemos confundir este sentido de "analítico" con el introducido por Kant en su distinción entre juicios analíticos y sintéticos. La noción de análisis presente en Kant no es de origen matemático, sino platónico-aristotélico. En la tradición medieval, la noción de "análisis" estaba íntimamente ligada a la distinción entre género y especie, y se introduce a la tradición moderna con el sentido de "separación en partes" (recordemos que una de las definiciones de juicio analítico que Kant da en los *Prolegómenos* (1984) es aquel cuyo predicado *está contenido* en el sujeto). Es interesante notar que ambas nociones de análisis desempeñan un papel importante en los orígenes de la lógica formal moderna. Cuando Boole intitula su texto de 1847 *The Mathematical Analysis of Logic*, él está utilizando la palabra "Analysis" precisamente en el primer sentido. No es de sorprender, por lo tanto, que su sistema formal sea de tipo algebraico. Unos años más tarde, cuando Peirce desarrolla su teoría lógica matematizada, considera necesario añadir al álgebra de Boole un nuevo símbolo "$\subset$" para representar que un concepto esté contenido en otro. Peirce encontró un fuerte paralelismo entre esta relación lógica entre conceptos (clave para la analiticidad kantiana) y la implicación material entre proposiciones (base para el concepto lógico de analiticidad), por lo que les dio a ambas relaciones el mismo símbolo. *Cfr*. Nidditch 1962, pp. 49, 50. Un desarrollo más detallado de la historia del concepto no algebraico de "análisis" en la filosofía moderna, se encuentra en Bealey 2002.

Este último uso del término analítico nos es tan común y natural hoy en día que no es raro encontrar confusiones a la hora de interpretar escritos procedentes de este importante periodo histórico. Por ejemplo, al revisar la historia de la geometría analítica, J.J. Gray (1994) sostiene que ésta recibe su nombre por el método analítico introducido por Descartes a la geometría durante el siglo XVII. Pero luego añade: "Antes de tratar los desarrollos modernos, el nombre de 'geometría analítica' debe ser explicado. Analizar algo, según la terminología matemática de los griegos y del siglo XVII, era separar algo en sus partes, de manera muy cercana a la forma en que se habla hoy en día del análisis químico. En la perspectiva cartesiana, las figuras se analizan en este otro sentido: se asignan coordenadas a los puntos y ecuaciones a las curvas; sobre todo, se asignan coordenadas al punto o puntos desconocidos, los cuales se tratan de la misma manera que las cantidades conocidas, hasta que se encuentre su valor a partir de ciertas ecuaciones obtenidas por este proceso de análisis" (pp. 852–853). Si bien es posible sostener que el método de coordenadas que Descartes usa en su geometría es *analítico* en este sentido, creo que he dejado claro que no era en este sentido que Descartes usaba el término. Otro ejemplo interesante de esta confusión es el intento de Helena M. Pycior (1994, pp. 1637–1638) por interpretar los pasajes de la obra de Edgar Allan Poe donde el personaje Auguste Dupin habla de la similitud entre sus métodos detectivescos y el análisis matemático. Una vez que entendemos que el análisis del que habla Poe es de naturaleza algebraica, nos deja de sorprender —como sorprende a Pycior— que Dupin no use el método de separación por partes, sino que haga referencia a cálculos abstractos y fórmulas.

Más sobre el método analítico clásico y su influencia en el pensamiento moderno temprano puede encontrarse en Hintikka y Remes 1974.

> El simbolismo literal algebraico moderno [. . .], comenzado hasta cierto punto por Diofanto, no se difundió hasta el siglo XVI, cuando François Viète (1540–1603), mejor conocido como *Vieta* por su nombre latinizado con que firmaba, empleó letras por vez primera para representar incógnitas. Antes de la época de Diofanto, el álgebra era *retórica*, esto es, se obtenían los resultados por medio de argumentación verbal, sin abreviaciones ni símbolos de niguna clase. [. . .] El *álgebra sincopada*, como se la llama, es más bien un caso de taquigrafía que de simbolismo completamente abstracto, pero es un paso bien definido en la dirección correcta. Sin lugar a dudas, Diofanto fue el primer matemático de la historia que proveyó algún sustituto para la expresión verbal prolija. (Kramer 1982, p. 65).

Esta distinción se introduce en la historia de las matemáticas para diferenciar el uso de símbolos dentro de las álgebras antigua y moderna. En el álgebra antigua, es decir, el álgebra clásica posterior a Diofanto, el álgebra árabe y la cosística occidental, no existía el concepto de *variable* tal y como lo entendemos hoy en día. Además de las constantes del propio cálculo, se usaban letras, pero éstas no eran más que abreviaciones de expresiones más complejas y/o recursos mnemotécnicos. Por lo tanto, no se tenían mecanismos para expresar cálculos en general. Dado que el formalismo algebraico contenía sólo símbolos constantes, no se podía expresar en él más que cálculos particulares. La generalidad se expresaba a través de casos particulares que servían como ejemplos o paradigmas. A este uso de los símbolos se le llama *sincopado*, pues no forma un lenguaje simbólico propiamente dicho. No fue sino hasta el trabajo de Viète y, paralelamente, Descartes, que aparecieron en matemáticas las variables propiamente dichas y, con ellas, el álgebra moderna. La introducción de variables en el lenguaje algebraico permitió dos avances importantes dentro de la historia de la matemática: la posibilidad de expresar formas generales[30] y, aun más importante, la posibilidad de calcular con ellas.

La diferencia central entre el álgebra moderna y la antigua es que, a través del uso de variables, por fin se pudo abstraer la forma de diferentes cálculos particulares y expresarla en una fórmula general. A diferencia de las fórmulas con letras del álgebra antigua, que expresaban cálculos particulares de manera abreviada, las fórmulas con variables del álgebra moderna permitían por primera vez expresar *formas* generales de cálculo. Este nuevo lenguaje simbólico permitió a los matemáticos manipular las formas generales de una manera que era casi imposible dentro del lenguaje anterior.

[30] En la matemática moderna, cuando se habla de “generalidad”, ésta no debe entenderse en el mismo sentido inductivo que tiene esta expresión fuera de las matemáticas. En su lugar, una expresión matemática “general” debe entenderse como una expresión *formal* (en el sentido inaugurado por el álgebra moderna), es decir, como un esquema de expresiones o cálculos de la misma forma. Así pues, podemos decir que en matemáticas no se *generaliza*, sino que se *formaliza*.

Además, les permitió integrar las nuevas fórmulas en un nuevo cálculo de formas generales. Es sólo hasta entonces que debe hablarse de un lenguaje *simbólico* propiamente dicho. En este sentido, un lenguaje simbólico no es simplemente aquel que usa símbolos, sino aquel que usa símbolos *para calcular*. Entonces, si bien es cierto que la introducción de las variables trajo consigo la posibilidad de expresar cierta generalidad o forma en matemáticas, el mayor logro conseguido con ellas fue la posibilidad de crear un nuevo tipo de cálculos formales. En otras palabras, lo que inaugura el álgebra moderna —y por lo que ésta representa una revolución significativa en el desarrollo de las matemáticas— es la *posibilidad de calcular con formas*.[31]

Por desgracia, la importancia de esta nueva herramienta no fue reconocida de manera inmediata por los matemáticos europeos de su tiempo. Por el contrario, durante los siguientes doscientos años se vivió en la matemática occidental una intensa lucha entre estas dos maneras de entender la matemática: conforme al paradigma formal del álgebra, o conforme al paradigma constructivo de la geometría. La extensión de este conflicto es tan obvio y tajante que es imposible entender la historia de las matemáticas —y, por extensión, del conocimiento científico en general— de estos siglos sin darle un lugar central a esta pugna. Por lo mismo, es fácil seguir el desarrollo de los ideales formales en matemáticas de Francia a Inglaterra, y ahí, en el siglo XIX, con la guía de la *Analytic Society*, a la lógica, a través del trabajo de De Morgan y Boole.[32]

Es tentador pensar que el carácter formal que introdujeron estos primeros lógicos formales esté relacionado con la vieja oposición filosófica entre forma y materia; sin embargo, esto no es así. Por el contrario, es claro que, al realizar su formalización de la lógica, algebristas como De Morgan no creían estar aislando cierta forma lógica, ausente de toda materia, sino estableciendo patrones de invariancia entre fórmulas lógicas. Esto resulta aún más claro si se analiza la polémica que se llevó a cabo entre De Morgan y Mansel a mediados del siglo XIX.[33] En su comentario a *Formal Logic* (De Morgan 1847), Mansel (1851) acusó a De Morgan de no manejar bien la distinción entre forma y materia. Sin embargo, es claro que ambos pensadores utilizaban la noción de forma de manera diferente. En una primera reacción a esta crítica, De Morgan trató de conciliar ambas nociones, pero

[31] Vale la pena mencionar que la palabra "forma" no fue utilizada con este sentido ni en asociación al método analítico al que aquí aludo de manera regular sino hasta que apareció el influyente trabajo de George Peacock. En 1830, Peacocke propuso como carácter definitorio del *álgebra simbólica* su *principio de permanencia de las formas equivalentes*: "Cualquier forma que sea algebraicamente equivalente a otra; cuando se expresan con símbolos generales, deben ser verdaderas, sin importar lo que denoten tales símbolos" (Peacocke 1830, p. 104). A Peacocke le debemos, pues, la convergencia entre lo "analítico", lo "algebraico", lo "simbólico" y lo "formal".

[32] *Cfr.* Grattan-Guiness 2000, pp. 14–74.

[33] *Cfr. ibid.*, pp. 28–29.

pronto se dio cuenta de la radical diferencia entre ellas. Para 1847, De Morgan ya consideraba la noción de forma opuesta a la de materia como una noción "metafísica" (1847, p. 27) irrelevante para su empresa de análisis lógico.[34]

Es importante, pues, distinguir entre la noción de forma opuesta a la materia y la noción de forma algebraica usada en la lógica matemática. El lenguaje formal de la lógica moderna se desarrolla dentro de la tradición algebraica.[35] En este sentido, el lenguaje simbólico de la lógica matemática, nacida a finales del siglo XIX y principios del XX, no es meramente sincopado, sino formal. No sólo usa fórmulas con variables para expresar la forma lógica de enunciados, sino que además cuenta con un cálculo que permite su manipulación.[36] Ambas propiedades son esenciales para la naturaleza matemática de la lógica. La formalización y el cálculo son los dos pilares sobre los cuales está construida la lógica matemática. La lógica simbólica contemporánea es matemática precisamente porque cuenta con ambas dimensiones. Si el lenguaje simbólico de la lógica no estuviera inscrito en un cálculo formal, no sería propiamente simbólico. Se quedaría simplemente en el nivel sincopado. Igualmente, si sus fórmulas no expresaran formas generales, no podríamos hablar de un lenguaje o una lógica formal.

Finalmente, el carácter formal de la lógica simbólica es esencial también para su aplicación. Una de las características más importantes que debe tener todo sistema lógico formal es que sea aplicable. Comúnmente, esta aplicabilidad se sustancializa en términos de su capacidad para simbolizar o formalizar[37] enunciados y argumentos del lenguaje natural. En los casos más simples, aplicar un sistema lógico formal requiere un mecanismo que permita "traducir" entre expresiones del lenguaje artificial y expresiones del lenguaje natural. Para demostrar su aplicabilidad, basta darle al forma-

[34] Desafortunadamente, más de medio siglo después de la discusión entre Mansel y De Morgan la distinción entre lo "formal" y lo "material" regresó al vocabulario lógico con la distinción entre *implicación material* e *implicación formal* introducida por Russell. Grattan-Guiness (2000, p. 318) conjetura que el esfuerzo de De Morgan por conciliar las dos nociones de "forma" pudo haber influido en Russell.

[35] No es una casualidad que los primeros sistemas de lógica matemática, como los de Boole y De Morgan, fueran algebraicos. Sobre los orígenes algebraicos de la lógica moderna, véase Kramer 1982.

[36] Esta doble dimensión de la lógica —como cálculo y como lenguaje— es por lo menos tan vieja como la *characteristica universalis* de Leibniz (1666), la cual, además de un lenguaje universal, era también un *calculo ratiocinator*. Ahí, Leibniz la describe como "una técnica general por medio de la cual todo razonamiento pueda reducirse a mero cálculo [. . .]. Este método debe servir, al mismo tiempo, como un tipo de lenguaje universal, cuyos símbolos y vocabulario propios puedan dirigir el razonamiento de tal manera que errores, excepto aquellos de hecho, sean como errores de computación, meramente el resultado de no aplicar las reglas de manera correcta."

[37] El hecho de que hablemos indistintamente de *formalización* y *simbolización* señala en este caso, una vez más, la generalizada confusión que existe entre la naturaleza formal y simbólica de la lógica matemática.

lismo una "traducción" al lenguaje natural que preserve las propiedades lógicas de éste. Sin embargo, este requisito de aplicación al lenguaje natural es demasiado estricto en muchos casos. Adoptarlo restringiría la aplicación de la lógica a los límites del lenguaje natural. Someter todo sistema lógico formal a un requisito tan fuerte como éste implicaría dejar fuera del campo de la lógica desarrollos tan importantes como la lógica infinitaria o las lógicas de cierta complejidad, cuya expresividad es más fuerte que la del lenguaje natural.[38]

Recordemos que los sistemas lógicos formales son *modelos científicos*. Como tales, su aplicación muchas veces no es directa y sencilla, sino que requiere idealizaciones que la alejen del mundo real. Un ejemplo clásico de este punto es la teoría de los gases ideales en física. Así como la inexistencia estricta de gases ideales en el mundo físico real no invalida los resultados de esa rama de la termodinámica, así también la posible inexistencia de argumentos o expresiones infinitas en el lenguaje natural no invalida la lógica infinitaria. Aunque muchos sistemas formales de lógica matemática no son aplicables de manera directa al lenguaje natural, no por ello dejan de servir a su propósito de ser modelos científicos del universo lógico. La aplicabilidad de un sistema o teoría lógica debe entenderse en el mismo sentido amplio en que toda teoría o modelo científico es aplicable a la realidad. De otra manera excluiríamos desarrollos importantes dentro de la lógica matemática.

3.2. Lo formal y lo matemático

El término "formal" ha desempeñado otro papel importante dentro del desarrollo de la lógica matemática a través de su asociación con la así llamada escuela *formalista* en filosofía de las matemáticas. Sin embargo, el sentido de "formal" relacionado con el proyecto filosófico de Hilbert y lo que Jaroslav Peregrin (1988) ha llamado *el giro "formalista" en lógica* es completamente distinto del sentido de "formal" del que hemos hablado hasta ahora. Stewart Shapiro (2000, p. 143) encuentra el origen de este segundo uso del término "formal" en el trabajo de Thomae (1898, pp. 1–11), para quien hablar de los números como signos tangibles no interpretados significaba tener un "punto de vista formal".[39] Sin embargo, es claro que Hilbert nunca habría aceptado una tesis como ésta y que, por lo tanto, su proyecto filosófico *no* es un formalismo en el sentido de Thomae. La asociación actual que existe entre el término "formalismo" y el pensamiento de Hilbert se debe a L.E.J. Brouwer, quien, en sus críticas al proyecto fundacionista de Hilbert, lo llamó de este modo, probablemente con el objetivo de

[38] Agradezco a un árbitro anónimo el haberme señalado este punto.

[39] También a Thomae le debemos la recalcitrante idea de que las matemáticas *son como un juego de ajedrez*. *Cfr.* Grattan-Guiness 2000, pp. 196–198.

asociarlo con el ingenuo y desacreditado proyecto de Thomae. La virulenta disputa entre Brouwer y Hilbert alcanzó tal celebridad, aun fuera de los círculos filosóficos y matemáticos de su tiempo, que la asociación entre el término “formalismo” y el proyecto hilbertiano quedó indeleblemente marcada. Pese a que, al menos desde su plática en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1904 (1905), Hilbert presentó su posición en explícita divergencia de la de Thomae, y a pesar de que él mismo nunca usó el término, la palabra “formalismo” ha quedado permanentemente ligada al pensamiento de este célebre filósofo y matemático.[40] En consecuencia, hoy en día, se define el carácter formal de un sistema o teoría matemática en términos de su adecuación a los cánones axiomáticos propuestos por Hilbert.[41] Esta definición del carácter formal de una teoría aparece formulada de manera tan cándida como la siguiente, del libro de texto *Introduction to Mathematical Logic*, usado para enseñar lógica matemática en la Universidad de Letonia:[42]

> La definición exacta de “lo formal” puede darse en términos de la teoría de algoritmos (o funciones recursivas): *una teoría* T *se denomina teoría formal si y sólo si se presenta un algoritmo (*i.e. *un procedimiento de cálculo aplicable mecánicamente) para verificar la corrección del razonamiento por medio de los principios de* T. Esto significa que cuando alguien va a publicar un “texto matemático” llamándolo “prueba de un teorema en *T*”, debemos poder verificar mecánicamente si el texto en cuestión realmente es una prueba de acuerdo con los cánones de razonamiento aceptados en *T*. Así pues, en las teorías formales, los cánones de razonamiento deben ser definidos con precisión suficiente para permitir verificar las pruebas mediante un programa de computador. (Nótese que aquí se habla de verificar *pruebas terminadas*, ¡no del problema de la verificabilidad!) (Detlovs y Podnieks 2000–2002, § 1.1)

Pese a que, en muchos casos, las teorías lógicas formales son “formales” también en este otro sentido, es importante tener claro que la lógica no tiene que ser axiomática y algorítmica para ser formal. Su carácter formal proviene de otro lado. Proviene de su uso de un lenguaje simbólico que permite el cálculo con formas generales. Por lo tanto, si queremos entender la naturaleza formal de la ciencia lógica, es esencial entender su lenguaje simbólico.

[40] Para distinguir entre el formalismo de Thomae y el proyecto de Hilbert, historiadores como Grattan-Guiness (2000) suelen distinguir entre un formalismo “de marcas en papel” y la versión más sofisticada de Hilbert.

[41] Una breve pero suficientemente detallada historia de la conexión entre el proyecto de Hilbert y cuestiones de computabilidad en matemáticas se encuentra en Shapiro 1994.

[42] Detlovs y Podnieks (2000–2002, § 1.1).

Al igual que el común de los lenguajes formales, los símbolos de la lógica se dividen en *constantes* y *variables*.[43] En las secciones anteriores hemos visto la importancia de las variables para la lógica formal. El papel de las constantes es diferente. Entre las constantes lógicas, los operadores lógicos ocupan un lugar destacado,[44] pues son ellos los que distinguen al lenguaje lógico del resto de los lenguajes simbólicos. Son ellos los que le otorgan su carácter lógico. De una manera un poco simplificada, podríamos decir que la naturaleza matemática de la lógica simbólica descansa en sus variables, mientras que su carácter propiamente lógico descansa en los operadores. La lógica simbólica es formal por el uso que hace de las variables, y lógica por la naturaleza de sus operadores.[45]

4. *Conclusiones*

La lógica matemática es matemática en cuanto que usa herramientas matemáticas. En este sentido, la lógica matemática lo es de la misma manera que lo es, digamos, la mecánica newtoniana. En ambos casos, el método es matemático, pero ellas mismas, las ciencias mismas, no son matemáticas. Su objeto de estudio pertenece a una realidad independiente. Además, la lógica matemática es formal en cuanto que las herramientas matemáticas que usa —tanto en su simbolismo como cálculo— son aquellas que originalmente recibieron el nombre de "formales" en matemáticas, es decir, aquellas desarrolladas en la era moderna originalmente para el desarrollo algebraico de la geometría y luego se volvieron hegemónicas en el resto de las matemáticas. Estas herramientas son formales, no directamente en el sentido que este término ha adquirido a partir de Hilbert, sino porque permiten el cálculo con formas generales.

[43] En sentido estricto, existe una división más básica entre los símbolos de la lógica simbólica: entre símbolos de puntuación y símbolos significativos. Los símbolos de puntuación más comunes en la lógica simbólica son los paréntesis y las comas. Éstos tienen una función meramente auxiliar y en la mayoría de los casos son prescindibles. Si bien nos ayudan sobremanera en la lectura de las fórmulas, todo lo que se puede expresar con ellos se puede expresar también sin ellos a partir de convenciones de lectura. Por ello, su papel dentro de la lógica simbólica no es relevante para la discusión presente. Una visión contraria sobre la importancia de los signos de puntuación en la lógica subyace en la "lógica propicia a la independencia" [*independence-friendly logic*] de Jaakko Hintikka, quien suele decir, sin ironía alguna, que los paréntesis son los símbolos lógicos más importantes. Para una introducción a este tipo de lógica, véase el capítulo "Game-Theoretical Semantics" del *Handbook of Logic and Language* compilado por Johan van Benthem y Alice ter Meulen (1997).

[44] El resto de las constantes lógicas simbolizan objetos primitivos particulares.

[45] Es por ello que muchos de los debates filosóficos importantes alrededor de la lógica se ocupan precisamente de estos operadores lógicos. Baste recordar que en el centro de la problematización filosófica de la lógica descansan las preguntas ¿cuáles son exactamente los operadores lógicos? y ¿cuál es su significado?

BIBLIOGRAFÍA

Aliseda, A., 1997, *Seeking Explanations: Abduction in Logic, Philosophy of Science and Artificial Intelligence*, Institute for Logic, Language, and Computation, Dissertation Series, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam.

Barwise, J. (comp.), 1977, *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam.

Bealey, M., 2002, "Decompositions and Transformations: Conceptions of Analysis in the Early Analytic and Phenomenological Traditions", *The Southern Journal of Philosophy*, suplemento al vol. XL, pp. 53–99.

Beall, J.C. y Greg Restall, en prensa, "Defending Logical Pluralism", en B. Brown y J. Woods (comps.), *Logical Consequences*, Kluwer, Dordrecht.

——, "Logical Pluralism", 2000, *Australasian Journal of Philosophy*, vol. 78, no. 4, pp. 475–493.

Benthem, J. van y A. ter Meulen (comps.), 1997, *Handbook of Logic and Language*", North-Holland Elsevier, Amsterdam.

Boghossian, P., 2001, "How Are Objective Epistemic Reasons Possible?", *Philosophical Studies*, no. 106, pp. 1–40.

Boole, G., 1847, *The Mathematical Analysis of Logic: Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning*, Macmillan, Cambridge.

Curry, H.B., 1963, *Foundations of Mathematical Logic*, McGraw-Hill, Nueva York.

De Morgan, S.E., 1847, *Formal Logic*, Walton and Maberly, Londres.

Detlovs, V. y Karlis Podnieks, 2000–2002, *Introduction to Mathematical Logic, Hyper-Textbook for Students*, http://www.ltn.lv/∼ podnieks/mlog/ml.htm.

Dunn, M. y G.M. Hardegree, 2001, *Algebraic Methods for Philosophical Logic*, Oxford Logic Guide no. 41, Oxford University Press, Nueva York.

Frege, G., 1884, *Die Grundlagen der Arithmetik*; *eine Logisch-Mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Willhelm Koebner Verlag, Breslau.

Grattan-Guiness, I., 2000, *The Search for Mathematical Roots (1870–1940). Logics, Set Theories and the Foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton University Press, Nueva Jersey.

—— (comp.), 1994, *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Siences*, Routledge, Londres.

Gray, J.J., 1994, "Algebraic and Analytic Geometry", en Grattan-Guiness 1994, pp. 847–859.

Hintikka, K.J.J. y Unto Remes, 1974, *The Method of Analysis: Its Geometrical Origin and its General Significance*, D. Reidel, Dordrecht.

Kant, E., 1984, *Prolegómenos a toda metafísica futura que haya de poder presentarse como ciencia*, trad. M. Caimi, Charcas, Buenos Aires.

Kirwan, C.A., 1995, "Logical Truth", en Ted Honderich (comp.), *The Oxford Companion to Philosophy*, Oxford University Press, Nueva York.

Kramer, E.E., 1982, *The Nature and Growth of Modern Mathematics*, Princeton University Press, Princeton.

Leibniz, G.W., 1666, "Dissertatio de Arte Combinatoria, cum Appendice", en C.J. Gerhardt Band (comp.), 1971, *Leibniz: Mathematische Schriften*, V, G. Olms Verlag, Hildesheim.

Lungarzo, C., 1984, “Interpretaciones filosóficas de teorías lógicas no ortodoxas”, *Polémos*, vol. 1, no. 1, pp. 5–33.

Maddy, P., 1997, *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

Mansel, L.H., 1851, “Recent Extensions of Formal Logic”, *North British Review*, pp. 90–121.

Moore, G.E., 1899, “The Nature of Judgement”, *Mind*, no. 8, pp. 176–193.

Morado, R., 1984, “La rivalidad en lógica”, *Diánoia*, Fondo de Cultura Económica/UNAM, México, pp. 237–249.

Neal, P., 2000, “Abduction and Induction: A Real Distinction?”, en Harry C. Bunt y William Black (comps.), *Abduction*, *Belief and Context in Dialogue: Studies in Computational Pragmatics*, J. Benjamins, Amsterdam.

Nidditch, P.H., 1962, *The Development of Mathematical Logic*, Routledge and Kegan Paul, Londres.

Palmer, A., 1988, *Concept and Object*. *The Unity of the Proposition in Logic and Psychology*, Routledge, Londres.

Peacock, G., 1830, *A Treatise on Algebra*, Deighton, Cambridge.

Peregrin, J., 1998, “Review: J. van Benthem and A. ter Meulen, eds. *Handbook of Logic and Language*”, *Prague Bulletin of Mathematical Linguistics*, no. 69, 1998, pp. 51–55.

Pycior, H.M., 1994, “Mathematics and Prose Literature”, en I. Grattan-Guiness (comp.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Routledge, Londres, pp. 1633–1643.

Quine, W., 1970, *Philosophy of Logic, Foundations of Philosophy Series*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Resnik, M.D., 1987, *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford University Press, Nueva York, pp. 162–166.

——, 2000, “Against Logical Realism”, *History and Philosophy of Logic*, no. 20, pp. 181–194.

Shapiro, S., 2000, *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, Nueva York.

——, 1997, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press, Nueva York.

——, 1994, “Meta-mathematics and Computability”, en I. Grattan-Guiness (comp.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Routledge, Londres, pp. 644–655.

Thomae, J.K., 1880, *Elementare Theorie der Analytischen Functionen einer Complexen Veränderlichen*, Halle, Niebert.

Woods, J., 2000, “How Philosophical Is Informal Logic?”, *Informal Logic*, vol. 20, no. 2, pp. 139–167.

Wright, C., 2001, “On Basic Logical Knowledge. Reflections on Paul Boghossian’s ‘How are Objective Epistemic Reason Possible?’ ”, *Philosophical Studies*, no. 106, pp. 41–85.

Xiang, H., 2002, *Hacia una teoría contextualista del razonamiento. Algunas implicaciones para la filosofía de la ciencia*, tesis de doctorado, UNAM.

Recibido el 25 de noviembre de 2002; revisado el 26 de junio de 2003; aceptado el 12 de agosto de 2003