

Potencial de la integración de Software en el aprendizaje de la matemática: Perspectivas Teóricas en la formación de profesores.

Faberth Díaz Celis.
Estudiante Doctorado en Educación DIE-UD
Énfasis Educación Matemática.
Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

El uso de las herramientas informáticas

Las investigaciones reconocen que el uso de herramientas informáticas (en la modalidad de “applets” y otros tipos de programas interactivos) tiene un potencial para transformar la enseñanza de la matemática; sin embargo, en la actualidad continúa planteado “un reto a los profesores, a los formadores de profesores y a los investigadores en didáctica, ya que su incorporación no es inmediata ni transparente” (Godino, Recio, Roa, Ruiz, & Pareja, 2005). Los resultados presentados por Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche (2001) a partir de un meta-análisis de más de 600 publicaciones con informes de investigaciones y experiencias de innovación sobre el uso herramientas informáticas en la educación matemática, constataron el bajo nivel de integración de las herramientas informáticas en las clases de matemáticas y las condiciones de su implementación. En las encuestas y entrevistas realizadas por Hennessy, Ruthven y Brindley (2005) los profesores manifiestan que usan las herramientas informáticas con cuatro intenciones: 1) mejorar el ambiente en forma general y generar una sensación de actividad en el aula; 2) ayudar a corregir errores y experimentar con las posibilidades de llevar a cabo tareas asignadas; 3) facilitar las tareas rutinarias mejorando la rapidez y fiabilidad de las operaciones; y 4) proporcionar “imágenes vivas” de las propiedades y las relaciones llamativas de las matemáticas.

Las investigaciones sobre el uso de herramientas informáticas para la enseñanza han contribuido a establecer que las herramientas, por sí mismas, no conducen a un cambio en el aprendizaje y tampoco tienen el poder de dar un mayor sentido a la actividad educativa (Montrieux, Vanderlinde, Courtois, Schellens, & De Marez, 2014). Estudios como los de De Corte (1996) revelan que el uso eficaz de las herramientas informáticas requiere una revisión del diseño de las estrategias y actividades. En lo que se refiere a la educación matemática, el trabajo realizado por Sherman (2014) mostró que el valor del uso de un software para el aprendizaje de las matemáticas, no depende únicamente de sus características internas sino también del diseño de la actividad en la que se usa.

Herramientas informáticas y geometría

En geometría, las investigaciones desarrolladas durante las últimas décadas (Laborde, 1995; Laborde y Capponi, 1994; Mariotti, 2000) reconocen, de forma similar, que el uso de Software de

Geometría Dinámica (SGD) tiene un potencial grande para transformar los procesos de enseñanza y aprendizaje. Ese potencial tiene que ver con las posibilidades que ofrece el SGD para atender la dificultad que presentan los estudiantes para diferenciar los objetos geométricos de sus representaciones. El SGD ofrece la posibilidad de establecer, de forma consensual con los estudiantes, un criterio para diferenciar el objeto geométrico y sus propiedades geométricas, de su representación y sus relaciones espacio-gráficas.

Fishbein (1993) y Mariotti (1995) hacen una distinción entre el dominio de los objetos y sus propiedades geométricas y el dominio de las relaciones espacio-gráficas de los dibujos, plasmados sobre papel o en una pantalla de ordenador. Los objetos y sus propiedades están enmarcados en una teoría geométrica, de la que también hacen parte las relaciones y las operaciones sobre estos objetos; mientras que las relaciones espacio-gráficas denotan las entidades gráficas en las que es posible llevar a cabo acciones físicas, y sobre las que es posible expresar ideas, interpretaciones, opiniones y juicios.

Mariotti (1995) establece que los problemas de la geometría requieren el uso de ambos dominios y la intercambio entre ellos y plantean que esta interacciones entre los dos dominios es una parte esencial del sentido de la geometría. En relación con la posibilidad de aprovechar el potencial del SGD, surge una pregunta: ¿qué recursos tiene el profesor para darse cuenta que los estudiantes, que están aprendiendo geometría, hacen la distinción e interacción entre estos dos dominios durante la solución de problemas? De otra forma ¿Qué recursos tiene el profesor para identificar que sus estudiantes diferencian que una construcción geométrica cumple unas condiciones y no solo muestra unas relaciones espacio-gráficas?

El profesor puede solicitar a los estudiantes una justificación deductiva de las propiedades que cumple su construcción, basándose en definiciones, axiomas y teoremas. Esta opción implica una paradoja: por un lado, se requiere que los estudiantes posean conocimientos teóricos geométricos y hayan desarrollado el razonamiento deductivo como prerrequisitos para el aprendizaje de la geometría, mientras que por otro, el estudio de la geometría busca precisamente que los estudiantes adquieran conocimientos teóricos geométricos y desarrollen su razonamiento deductivo.

El SGD permite “visualizar” la relación entre una construcción geométrica de un objeto y un conjunto de sus posibles representaciones (dibujos), y establecer el siguiente criterio: una construcción geométrica cumple unas propiedades, cuando al cambiar de posición los elementos de la construcción, los dibujos mantienen las relaciones espacio-gráficas relativas a las propiedades solicitadas. De esta manera se puede lograr un acuerdo con los estudiantes para diferenciar una propiedad geométrica y una relación espacio gráfica sin demandar un conocimiento teórico previo.

Mientras las investigaciones sobre el potencial del SGD muestran sus usos para generar un ambiente de discusión y generación de acuerdos entre profesores y estudiantes, las

investigaciones sobre los usos que les dan los profesores, muestran que ellos restringen el uso de las herramientas informáticas para reforzar la exposición de los contenidos y para convencer a los estudiantes de la validez de los contenidos de las exposiciones.

Los trabajos de Garry (1997), Laborde (1995, 2001), Mackrell (2008) y Stevenson (2000) proponen diseños de ambientes y secuencias de actividades que, fundamentados en una teoría, permiten aprovechar el potencial del SGD, sin embargo estas investigaciones muestran que la integración del SGD no es fácil por parte de los profesores porque, aún hoy existe la necesidad, enunciada en el Proyecto Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia, de “generar [mayor cantidad de] estrategias didácticas para incorporar los recursos que la tecnología pone al alcance de las instituciones educativas” (MEN, 2002, p. 17).

Drijvers et al. (2010) plantean la necesidad de establecer marcos teóricos con el fin de guiar el diseño de la enseñanza, para entender el aprendizaje, y para mejorar la educación matemática, cuando se usa SGD. En concreto, indagan sobre una respuesta a la pregunta ¿qué marcos teóricos se utilizan en la investigación relacionada con la tecnología en el campo de la educación matemática y qué ofrecen estas perspectivas teóricas?

Drijvers et al. (2010) establecen que algunos enfoques teóricos han sido adaptados desde teorías existentes en Educación y en Didáctica Matemática, para abordar la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza en ambientes tecnológicos, este es el caso de algunas teorías del aprendizaje como la Webbing and Situated Abstraction¹, la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau y la Perceptuo-Motor Activity². Describen, además, cómo la utilización de algunos elementos de TSD ha abierto un nuevo marco teórico: la Orquestación instrumental (Trouche, 2007); y cómo una perspectiva centrada en el papel de los signos y símbolos y su interpretación, ha abierto el marco teórico de la Mediación Semiótica (Bartolini Bussi and Mariotti, 2002). Ante la diversidad de marcos teóricos que investigan el uso de la tecnología en la educación matemática, existe la posibilidad de investigar la integración y las interrelaciones entre ellos, mediante proyectos como REMATH (Artigue 2006; Artigue et al. 2006).

La TSD y las herramientas informáticas

Los conceptos centrales de TSD, según Drijvers et al. (2010, p. 102), que han sido incorporados en investigaciones recientes sobre los ambientes de aprendizaje tecnológicos son: el medio (Floris 1999), el contrato didáctico (Gueudet, 2006), y la institucionalización (Trouche, 2004).

Brousseau desarrolló el concepto de medio, y describió su integración en el proceso de aprendizaje de la siguiente manera:

¹ [la teoría del Andamiaje y la Abstracción Situada] (*Trad. Propia*).

² [Teoría de la Actividad Perceptivo-motora] (*Trad. Propia*).

The teacher's work therefore consists of proposing a learning situation to the student in such a way that she produces her knowing as a personal answer to a question and uses it or modifies it in order to satisfy the constraints of the milieu and not just the teacher's expectations. (Brousseau 1998, p. 228)³

El diseño del medio es fundamental para la situación de aprendizaje, en la TSD las herramientas tecnológicas se asumen como el medio material con cual el estudiante interactúa y se adapta. Como ha señalado Artigue (2006), el medio de aprendizaje es aquel que, por definición, es antagónico - es decir, está en oposición al estudiante y a su estado actual del conocimiento:

Within this framework [TSD], the learning outcomes resulting from the use of an instrument at the practical level are discussed in terms of the interaction of the learner with the milieu antagoniste. ... We may consider the learning outcomes as being the result of the adaptation of the learner to the milieu in consequence to the retroactions of the milieu on the learner himself/herself. Thus, if an educator wants to employ an instrument at the educational level, he/she has to set up situations in which the instrument is part of the milieu and is employed by the learner as a means to accomplish the proposed task. (pp. 15-16)⁴

Siguiendo a Acosta & Camargo (2014), la TSD establece que es necesario desarrollar una manera indirecta para transmitir el saber,

esa estrategia indirecta consiste en plantear una situación a-didáctica, en la que gracias a la interacción con el medio, los estudiantes invalidan determinadas estrategias y validan sólo aquellas que están de acuerdo con el saber; el producto de esos procesos de validación e invalidación es un conocimiento personal y contextualizado. Una vez que los estudiantes han construido un conocimiento gracias al funcionamiento de la situación a-didáctica, el profesor explicita las relaciones de ese conocimiento (personal y contextualizado) con el saber (impersonal y descontextualizado), en lo que recibe el nombre de proceso de institucionalización. Cuando los estudiantes establecen relaciones entre el saber institucional y su conocimiento personal, el saber adquiere sentido para ellos. Así que la TSD considera dos grandes fases del proceso de enseñanza: la fase de funcionamiento a-didáctico, en la que la interacción principal es entre los estudiantes y el medio preparado por el profesor, y la fase de institucionalización en la que el profesor explicita las relaciones entre el saber y el conocimiento. (p. 17)

¿Cuáles son las implicaciones de considerar el SGD como medio en una situación de aprendizaje desde la TSD?

De manera similar a como se necesita diseñar estrategias didácticas que faciliten la incorporación de las herramientas informáticas, para este caso concreto, se necesita poner a disposición de los

³ [Por lo tanto, el trabajo del profesor consiste en proponer una situación de aprendizaje para el estudiante de tal manera que este produzca su conocimiento como una respuesta personal a una pregunta y lo use o lo modifique con el fin de satisfacer las restricciones del medio y no sólo las expectativas del maestro. (Brousseau 1998, p. 228)] (Trad. Propia).

⁴ [En el marco de la TSD los aprendizajes que resultan del uso de un instrumento a nivel práctico se analizan en términos de la interacción del alumno con el medio antagonista. Podemos considerar los aprendizajes como el resultado de la adaptación del estudiante al medio. Por lo tanto, si un educador quiere emplear un instrumento en la clase, él tiene que diseñar situaciones en las que el instrumento es parte del medio y es empleado por el alumno como un medio para llevar a cabo la tarea propuesta. (pp. 15-16)] (Trad. Propia).

profesores una mayor cantidad de Ingenierías Didácticas⁵ (ID) que permitan el análisis del uso del SGD, como medio con el cual los estudiantes interactúan, y adoptar una estrategia experimental para poner en práctica la validación a través de la experiencia.

En Colombia, el grupo de Nuevas Tecnologías de Edumat UIS, mediante la línea de investigación sobre las “Tecnologías informáticas y computacionales como apoyo a la enseñanza y aprendizaje de la matemática y las ciencias”, viene desarrollando el Proyecto Institucional del uso de la Geometría Dinámica desde el año 2009, con el propósito que los profesores de Matemáticas de los colegios utilicen el software Cabri Geometry para la enseñanza de la Geometría. Este Proyecto usa como referente teórico la TSD y en él, a partir del diseño de Ingenierías Didácticas, han analizado el diseño y el desarrollo de las actividades cuando se usa SGD, haciendo descripciones del funcionamiento de la situación a-didáctica.

La línea de Investigación Tecnología y Didáctica de la Geometría del Doctorado Interinstitucional en Educación (Acosta & Camargo, 2014) identifica trabajos que han mostrado evidencias en las que: 1) El arrastre puede introducirse como elemento de un contrato didáctico, gracias al cual el alumno puede invalidar las estrategias basadas únicamente en la percepción, y validar aquellas estrategias de solución de problemas basadas en propiedades geométricas; 2) La demostración y el razonamiento deductivo pueden desarrollarse como cambio del contrato didáctico para que el estudiante se independice del arrastre como herramienta de validación; y 3) El ciclo situación a-didáctica-puesta en común-institucionalización puede instalarse como un ciclo de enseñanza productivo para el aprendizaje de la geometría.

Los diseños y las investigaciones reportadas por Acosta (2005; 2008; 2010a; 2010b; 2011; 2013) muestran que las situaciones a-didácticas de las ID diseñadas para incorporar el SGD en la enseñanza de la geometría en los cursos de educación secundaria (para estudiantes entre 12 y 14 años), permite aprovechar el potencial del SGD. Sin embargo, algunos de estos diseños no abordan de forma explícita un análisis a priori del rol del profesor para intervenir en el proceso de transformación del conocimiento alcanzado por el estudiante al saber institucional.

Desde la perspectiva de Margolinas (2009) según la cual

el problema que se plantea para la ingeniería es poder prever cuál puede ser el rol del profesor en esas fases dado que la idea de "carta blanca" asociada a esas fases de balance nos parece incorrecta. En efecto, pensamos que el análisis de las condiciones de validación que hemos desarrollado, aunque es parcial, permite que el investigador haga un análisis a priori de tales fases, en función del avance de una secuencia dada. Así pues, no se trata aquí de un análisis de

⁵ “... el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase.” Douady (1996, p. 241).

las limitaciones de la situación; se trata de analizar las alternativas que se abren, no las que se cierra. (p. 174)

Surge en consecuencia una posible pregunta de investigación:

¿Qué dificultades se le presentan al profesor para transformar el conocimiento personal y contextualizado del estudiante en saber institucional, cuando usa SGD como herramienta de enseñanza?

Bibliografía

- Acosta, M. (2005). Geometría Experimental con Cabri. *Educación Matemática*, 17(3), 121-140.
- Acosta, M. (2008). Etude expérimentale avec Cabri3d de la généralisation á l'espace d'un problème de géométrie plane. *Revista Integración*, 26(1), 29-46
- Acosta, M. (2010a). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. *Revista Integración*, 28(2), 173-189
- Acosta, M. (2010b). Dificultades de los profesores para integrar el uso de Cabri en clase de geometría. Experiencias de un curso de formación docente. *Tecné, Episteme y Didaxis*. 28, 57-72.
- Acosta, M. (2011). Resolución de problemas por medio de la matemática experimental: uso de software de geometría dinámica para la construcción de un lugar geométrico desconocido. *Integración*, 26(2), 145-156.
- Acosta, M. (2013). Lugares geométricos en la solución de un problema de construcción: presentación de una posible técnica de una praxeología de geometría dinámica. *Educación Matemática*, 25(2), 141-160
- Acosta, M., Camargo, L. (2014) Línea de Investigación en Tecnología y Didáctica de la Geometría. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Recuperado http://die.udistrital.edu.co/lineas/tecnologia_y_didactica_geometria
- Artigue, M. (2006). Methodological tools for comparison of learning theories in technology enhanced learning in mathematics. <http://telearn.noe-kaleidoscope.org/warehouse/Artigue-Kaleidoscope-2006.pdf>. Accessed 19 September 2007.
- Artigue, M., Defouad, B., Duperier, M., Juge, G., & Lagrange, J.-B. (1998). Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée (cahier de DIDIREM, numéro spécial, no. 4), Paris: Université Denis Diderot, Équipe DIDIREM.
- Artigue, M; Douady, R; et al. 1995. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. (Grupo Editorial Iberoamérica, Bogotá).
- Bartolini Bussi, M.G., & Mariotti, M.-A. (2002). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi,

G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, second revised edition*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Brousseau, G. (1998). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970–1990* (edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, and V. Warfield). Dordrecht: Kluwer.

Calderón, D., León, O. (2009). “La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula de matemáticas”. En: *perspectivas de la investigación del discurso en el aula*. Publicación del Énfasis de Lenguaje del Doctorado Interinstitucional en Educación. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. (En prensa).

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de collège-seconde. En Barbin, E., Douady, R. (Eds.). *Enseñanza de las matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Francia. Topiques éditions. Publicación del I.R.E.M.

Drijvers, P.; Kieran, C.; & Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical perspectives. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics education and technology —rethinking the terrain* (pp. 89–132). New York: Springer

De Corte, E. (1996). Changing views of computer supported learning environments for the acquisition of knowledge and thinking skills. In S. Vosniadou, E. De Corte, R. Glaser, & H. Mandl (Eds.), *International perspectives on the design of technology-supported learning environments* (pp. 129–145). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Floris, R. (1999). Comment penser didactiquement la présence d’une calculatrice symbolique et graphique dans le milieu? In M. Bailleul (Ed.), *Actes de la Xe École d’Été de Didactique des Mathématiques* Vol. 1, (pp. 262–265). Houlgate: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

Garry, T. (1997). Geometer’s sketchpad in the classroom. In J. R. King & D. Schattschneider (Eds.) *Geometry Turned On!: Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research* (pp. 55–62). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Godino, J.; Recio, A.; Roa, R.; Ruiz, F. & Pareja, L. (2005) *Criterios de diseño y evaluación de situaciones didácticas basadas en el uso de medios informáticos para el estudio de las matemática*. Proyecto de Investigación “Edumat-Maestros”. Universidad de Granada

Gueudet, G. (2006). Learning mathematics in class with online resources. In C. Hoyles, J.-b. Lagrange, L.H. Son, & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction* (pp. 205–212). Hanoi Institute of Technology and Didirem Université Paris 7.

Hennessy, S., Ruthven, K., & Brindley, S. (2005). Teacher perspectives on integrating ICT into subject teaching: commitments, constraints, caution, and change. *Journal of Curriculum Studies*, 37(2), 155-192.

- Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 14(1), 165–210.
- Laborde, C. (1995). Designing tasks for learning geometry in a computer-based environment. In L. Burton & B. Jaworski (Eds.), *Technology in Mathematics Teaching: A Bridge Between Teaching and Learning* (pp. 35–68). London: Chartwell-Bratt.
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283–317.
- Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C., & Trouche, L. (2003). Technology and mathematics education: A multidimensional study of the evolution of research and innovation. In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*, 1 (pp. 237–269). Dordrecht: Kluwer.
- Mackrell, K. (2006). Cabri 3D: potential, problems and a web-based approach to instrumental genesis. In C. Hoyles, J.-b. Lagrange, L. H. Son, & N. Sinclair (Eds.), *Proceedings of the Seventeenth Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction*. Hanoi Institute of Technology and Didirem Université Paris 7.
- Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas*. (M. Acosta, & J. E. Fiallo, Trans.) Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander
- Mariotti, M. A. (1995), Images and Concepts in Geometrical Reasoning. In R Sutherland and J. Mason (Eds), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education*. Berlin: Springer
- Mariotti, M.A. (2000) Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment, *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 25-53.
- Ministerio de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones. (2012). *Ministerio de la Formación de Docentes en TIC, casos exitosos de Computadores para Educar*. Bogota: Ed. MTIC.
- MEN (2002). *Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*, Serie memorias, Bogotá, Colombia.
- Montrieux, H., Vanderlinde, R., Courtois, C., Schellens, T., & De Marez, L. (2014). A Qualitative Study about the Implementation of Tablet Computers in Secondary Education: The Teachers' Role in this Process. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 112.
- Sherman, M. (2014). The role of technology in supporting students' mathematical thinking: Extending the metaphors of amplifier and reorganizer. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 14(3), 220-246.

Stevenson, I. (2000). Modelling hyperbolic space: designing a computational context for learning non-Euclidean geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5(2), 143–167.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281–307.

Trouche, L. (2007). Environnements informatisés d'apprentissage: quelle assistance didactique pour la construction des instruments mathématiques? In R. Floris & F. Conne (Eds.), *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques* (pp. 19–38). Brussels: DeBoeck & Larcier.